Cours Optimisation numérique **M. Postel**
Année universitaire 2025-2026

Semaine 1

TP 1 - mardi 2 septembre 2025

Dans cette première séance, on prend en main le logiciel Matlab : on joue avec la notion d'approximation numérique d'une dérivée, puis on utilise une fonction `Matlab`*préprogrammée pour résoudre un problème d'optimisation linéaire.*

1 Approximation numérique d'une dérivée

Le but de l'exercice est de vérifier la précision numérique de deux approximations par différences finies de la dérivée d'une fonction

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

1. Ouvrir une fenêtre d'édition, taper les commandes

```
% nom et prénom du ou des programmeurs
clear   % desaffecte les variables
close all  % ferme les fenetres graphiques
```

   et sauver dans le fichier `M_approx_derivee.m`

2. Définir à la suite dans le fichier `M_approx_derivee.m` les variables $h = 0.1$, $dx = \pi/100$ et un tableau d'abscisses x pour discrétiser finement l'intervalle $[0, \pi]$, $x_i = idx$, $i = 0, \dots, 100$ (utiliser la commande `linspace`).
3. Calculer (sans boucle `for`) dans un tableau d la dérivée exacte de la fonction $\sin$ aux points x et dans un tableau $d1$ les valeurs approchées par la première formule ci-dessus.
4. Calculer l'erreur maximale commise en faisant cette approximation sur l'intervalle $[0, \pi]$ (utiliser la commande `norm`). Afficher le résultat avec une commande `fprintf`. Diminuer h, que remarque-t-on ?
5. Mêmes questions avec la deuxième approximation. Les valeurs approchées seront calculées dans un vecteur $d2$.
6. Représenter sur le même graphique la dérivée et ses deux approximations. Ajouter des légendes pour les axes et pour distinguer les trois courbes. Interpréter. Commandes `plot, xlabel, ylabel, legend`...
7. Ecrire une fonction recevant en argument d'entrée le paramètre h et renvoyant en paramètre de sortie les erreurs maximales en valeur absolue entre les discrétisations et la valeur exacte de la dérivée de la fonction `sin`.

```
%dans le fichier max_error.m
function [e1,e2]=max_error(h)
...
...
e1=...
e2=...
```

8. Toujours dans le même fichier `M_approx_derivee.m`, appeler la fonction `max_error` pour plusieurs valeurs de h et vérifier que la fonction calcule correctement l'erreur.
9. Définir un vecteur `H` contenant des valeurs croissantes entre 10^{-10} et 0.1 (utiliser la fonction `logspace`).
10. Utiliser une boucle `for` pour appeler la fonction `max_error` avec l' argument d'entrée h prenant successivement les valeurs contenues dans `H`. Stocker les erreurs renvoyées par la fonction dans la composante correspondante de deux vecteurs `E1` et `E2`.
11. Dans une deuxième fenêtre graphique, représenter graphiquement les erreurs en fonction du paramètre h à l'aide de la commande `loglog(H,E)` (au lieu de `plot(H,E)`). Matérialiser les points de calcul par des symboles. Superposer les droites correspondant aux comportements asymptotiques attendus (mettre une légende et des labels d'axes). Que remarque-t-on ?
12. Trouver numériquement l'ordre d'approximation du schéma centré

$$f'(x) \approx \frac{4}{3}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{1}{3}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h}.$$

Vérifier votre résultat à l'aide d'une combinaison linéaire de développements de Taylor.

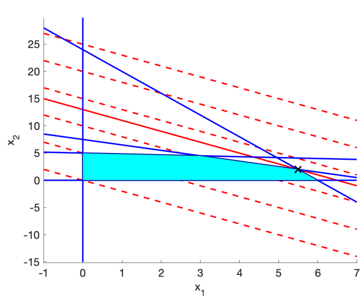
2 Optimisation linéaire

Dans cet exercice on reproduit l'exemple de la diapo 13

$$(P)\left\{\begin{array}{cccl} \text{Minimiser} & c^T x & & c \text{ et } x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{sous les contraintes} & Ax \preceq b & \text{avec} & b \in \mathbb{R}^m, \\ & x \succeq 0 & & A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Réécrire le problème sous la forme attendue par le programme
`x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)`
Pour trouver le minimum de $f^T x$ sous les contraintes



$$\left\{\begin{array}{l} A.x \preceq b \\ A_{eq}.x = b_{eq} \\ lb \preceq x \preceq ub \end{array}\right.$$

2. Tracer en traits pleins bleu les droites délimitant les contraintes.
3. Tracer en pointillés rouges quelques isovaleurs de la fonction à minimiser
4. Indiquer la solution trouvée par une croix noire
5. Rajouter l'isovaleur correspondant à la solution trouvée, en trait plein rouge.
6. Comment faire pour colorier le domaine admissible, comme dans l'énoncé ?