TD1 : Approximation de systèmes non linéaires

Exercice 1.
On se propose d'approcher la solution $x^* \in \mathbb{R}$ de $\cos x = x$.

1. Tracer le graphe de $g = \cos$ pour localiser x^*. Représenter les premières itérations de la méthode de point fixe pour une valeur x_0 dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que le théorème du point fixe de Picard s'applique sur l'intervalle $[0, 1]$. Quelle constante de contraction obtient-on pour g ?
3. Estimer $e_n = |x_n - x^*|$ l'erreur au rang n en fonction de l'erreur initiale $e_0 = |x_0 - x^*|$ lorsqu'on prend x_0 dans l'intervalle $[0, 1]$.
4. Que se passe-t-il si on prend x_0 dans $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$?

Exercice 2.
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et x^* un point fixe de f.

1. On suppose que $|f'(x^*)| < 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x_0 tel que $|x_0 - x^*| < \epsilon$, la suite (x_n) donnée par la méthode de point fixe converge vers x^* de manière linéaire.
2. On suppose que $|f'(x^*)| > 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que
$$|f(x) - x^*| > |x - x^*|, \quad \forall\, x \in]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[\setminus \{x^*\}.$$

Exercice 3.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe x^* tel que $f(x^*) = x^*$ et on construit la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ pour un x_0 donné dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $|f'(x^*)| < 1$ et $f'(x^*) \neq 0$. D'après l'exercice précédent, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x_0 tel que $|x_0 - x^*| < \epsilon$, la suite (x_n) converge vers x^* de manière linéaire. Montrer qu'on n'a pas convergence sur-linéaire.
2. On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $f'(x^*) = 0$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x_0 tel que $|x_0 - x^*| < \epsilon$, la suite (x_n) converge vers x^* de manière (au moins) quadratique. *On dit que le point fixe x^* est super-attractif.*
3. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$. Montrer que si $f \in C^p(\mathbb{R})$ et $f'(x^*) = \cdots = f^{(p-1)}(x^*) = 0$ alors la suite (x_n) converge vers x^* au moins à l'ordre p.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ une application lipschitzienne de constante de Lipschitz M. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$(f(x) - f(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2, \, \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^N.$$

1. Montrer que, pour tout $\omega \in]0, 2\alpha/M^2[$, la fonction $g_\omega(x) = x - \omega f(x)$ est contractante.
2. En déduire une méthode pour approcher le zéro de f.

Exercice 5.
On s'intéresse ici à la méthode de dichotomie pour déterminer le zéro d'une fonction. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ qui vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qui admet un unique zéro x^* sur l'intervalle $[a, b]$. On pose $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $x_2 = \frac{a+b}{2}$. Si $f(x_2) = 0$, alors $x_2 = x^*$ et le problème est résolu. Sinon, si $f(x_0)f(x_2) < 0$, on pose $x_3 = \frac{x_0+x_2}{2}$ et si $f(x_1)f(x_2) < 0$, on pose $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$. On réitère ensuite ce processus en choisissant à chaque étape comme nouvelle itération le milieu de l'intervalle qui contient x^*.

1. Montrer que, pour $n \geq 1$ $|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}$.
2. Montrer, à l'aide d'une figure, que l'erreur peut croître.
3. Montrer que la convergence de cette méthode s'apparente tout de même à une convergence linéaire.

Exercice 6.
Utiliser la méthode de Newton pour calculer une valeur approchée de π et une valeur approchée de $\arccos(x_0)$ pour $x_0 \in]-1, 1[$;

Exercice 7.
Cet exercice donne une autre démonstration que celle vue en cours de la convergence quadratique de la méthode de Newton.

Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. On considère la méthode de Newton pour approcher un élément x^* tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$.
On peut écrire les itérations de la méthode de Newton sous la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Calculer $g'(x^*)$.
2. Utiliser un exercice précédent pour en déduire que la méthode de Newton a une convergence quadratique locale.
3. Sous quelles conditions la méthode est d'ordre 3 ?

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \neq 0$. Montrer, à l'aide de l'exercice , que la méthode de Newton converge localement de manière linéaire.

Exercice 9.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y(x-1) + x^2y^2 - 4(y-1)x^4 - 1 \\ -y^3(x^3+1) + 2x - (y+2)(x-1) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $J_F(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Ecrire la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $F(x, y) = (0, 0)^t$.
3. Montrer que la méthode converge localement vers $(1, 1)^t$.

Exercice 10.
Dans cet exercice, on se propose de calculer la racine carrée de $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ par la méthode de Newton. On pose $f_\lambda(x) = x^2 - \lambda$.

1. Ecrire la définition de la suite $(\mu_k)_k$ obtenue par la méthode de Newton appliquée à la fonction f_λ et initialisée par $\mu_0 > 0$.
2. Montrer que si $\mu_k > \sqrt{\lambda}$, alors $\mu_{k+1} \in]\sqrt{\lambda}, \mu_k[$.
3. Montrer que si $\mu_0 < \sqrt{\lambda}$, alors $\mu_1 > \sqrt{\lambda}$.
4. En déduire que la suite $(\mu_k)_k$ converge vers $\sqrt{\lambda}$.