
CONTRÔLE CONTINU 2

Durée du contrôle : 1 heure 30

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

Les réponses aux questions devront être justifiées pour être prises en compte (phrases rédigées et calculs intermédiaires).

La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1.

On se donne un ensemble de mesures $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ et on cherche des paramètres réels a_1, a_2 et a_3 tels que la fonction

$$f(x; a) = a_1 e^{a_2 x} + a_3$$

approche au mieux ces mesures au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'on cherche $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ qui minimise

$$G(a) := \|F(a)\|^2$$

où $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^N$ est donnée par

$$F(a) := (F_i(a))_{1 \leq i \leq N}, \quad \text{avec } F_i(a) = f(x_i, a) - y_i = a_1 e^{a_2 x_i} + a_3 - y_i \text{ pour } 1 \leq i \leq N.$$

1. Quelles sont les dimensions de la matrice jacobienne $J_F(a)$ de la fonction F ? La calculer.
2. Quelles sont les dimensions du gradient $\nabla G(a)$ de la fonction G ? Le calculer.
3. Dans le cas $N = 3$, écrire l'algorithme de Newton pour trouver a^* tel que $F(a^*) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
4. Dans le cas $N > 3$, écrire l'algorithme de Gauss-Newton pour trouver a^* tel que $G(a^*) = \min_{\mathbb{R}^3} G(a)$.

Exercice 2.

On considère le problème

$$(P) \quad \inf_{x_1^2 + 4x_2^2 = 4} f(x)$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$.

1. Montrer, sans la calculer, que (P) a une solution.
2. Faire une figure représentant le domaine admissible et les courbes de niveau $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(4)$ de la fonction à minimiser.
3. Calculer le gradient et le hessien de $f(x)$.
4. Donner l'expression du lagrangien $\ell(x, \lambda)$ associé à (P). On précisera dans quel espace est λ .
5. Calculer le jacobien de la contrainte. Montrer que la contrainte est qualifiée.
6. Calculer le gradient du lagrangien $\nabla_x \ell(x, \lambda)$.
7. Utiliser le théorème des extremas liés pour résoudre le problème.
8. Placer votre solution x^* sur la figure. Pouvait-on prévoir ce résultat?
9. Mêmes questions (1 à 8) avec la contrainte $x_1 + x_2 = 0$ et la même fonction f .

1. Pour $c \in \mathbb{R}$, la courbe de niveau c est l'ensemble $f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = c\}$