Contrôle continu 2

Durée du contrôle : 1 heure 30

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (12 points)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = ax^2 + by^2.$$

1. (1 point) Sous quelle hypothèse sur a et b, la fonction f est-elle strictement convexe ?
2. (1 point) Déterminer une condition suffisante sur a et b afin que la fonction f soit coercive.
3. (1 point) Sous ces hypothèses, la fonction f admet-elle un unique minimiseur ? Si oui, que vaut-il ?
4. (2 point) Soit $\alpha > 0$ le pas. Expliciter la méthode de descente de gradient à pas constant pour la minimisation de la fonction f (i.e. on donnera une formule explicite pour le vecteur (x_{n+1}, y_{n+1}) en fonction de x_n, y_n, a, b et α). Donner une condition suffisante sur α pour que la méthode converge.
5. (2 point) Expliciter l'algorithme de la méthode du gradient à pas optimal pour la minimisation de f (on écrira x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n, y_n, a et b uniquement).
6. (1 point) Montrer que si $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et $y_n \neq 0$.
7. (1 point) En déduire que la méthode du gradient à pas optimal ne converge pas en un nombre fini d'itérations en général.
8. (1 point) Notons $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. Écrire la fonction f sous la forme

$$f(X) = \frac{1}{2}(X, AX) + (B, X),$$

   où $X = (x\ y)^T$ et A et B sont une matrice et un vecteur à déterminer.
9. (2 points) Calculer les deux premières itérations de la méthode du gradient conjugué, en prenant la condition initiale $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Que pouvons nous en conclure ?

Exercice 2. (8 points)
Dans $\mathbb{R}^2$, nous considérons un ressort fixé en $(0, 0)$, de constante de raideur $k > 0$ et de longueur à l'équilibre $l > 0$. Notons (x, y) la position de l'extrémité libre du ressort, nous cherchons les états d'équilibre stable du système, i.e. les points qui minimisent l'énergie potentielle élastique

$$E(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 - l^2)^2.$$

1. (1 point) Calculer le gradient de E, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et montrer que les points critiques de E appartiennent à l'union d'un point P et d'un cercle $\mathcal{C}$.
2. (2 points) Pour P et les points de $\mathcal{C}$, dire, en étudiant les valeurs propres de la hessienne, s'il s'agit de minimiseurs locaux, maximiseurs locaux ou si on ne peut pas trancher.

3. (1 point) Pour les points de $\mathcal{C}$, calculer l'énergie potentielle et en déduire que E admet une infinité de minimiseurs globaux.
4. (1 point) Supposons maintenant que l'extrémité libre du ressort est contrainte de rester sur le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 1. Écrire ce problème sous la forme d'un problème de minimisation sous contrainte
$$\min_{(x,y)\in K} E(x, y)$$
où $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ g(x, y) = 0\}$ avec g une fonction à définir.
5. (1 point) Justifier, à l'aide d'un résultat du cours, que ce problème admet au moins une solution.
6. (2 point) Si $l < 1$, montrer à l'aide du Théorème des extrema liés que ce problème sous contrainte admet une unique solution et la déterminer. On pourra commencer par faire un dessin du système pour mieux se représenter son fonctionnement.
7. (Bonus) Que se passe-t-il si $l \geq 1$?