Exercice 1 ***7 points***
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f_a : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$.

1. En étudiant la hessienne de la fonction f_a, montrer que f_a est strictement convexe si $a \in]-2, 2[$.
2. Soient $a, x, y \in \mathbb{R}$. Montrer l'inégalité suivante
$$axy \geq -\frac{|a|}{2}(x^2 + y^2).$$
Indication : On pourra traiter séparément les cas $a \geq 0$ et $a \leq 0$.
3. À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$f_a(x, y) \geq \frac{1}{2}(1 - |a|)\|(x, y)\|^2 - 4$$
et en déduire que f_a est coercive si $a \in]-1, 1[$.
4. Résoudre le problème de minimisation $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_a(x, y)$ lorsque $a \in]-1, 1[$.

Exercice 2 ***7 points***
Soient $\beta > 0$ et f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq \beta$.

1. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que f est coercive.
2. Justifier que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ et en déduire que f admet un unique minimiseur sur $\mathbb{R}$.
3. Soient $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Écrire l'algorithme du gradient à pas constant α pour la minimisation de la fonction f sous la forme d'une méthode de point fixe pour une fonction g (à définir). On prendra x_0 comme condition initiale.
4. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que
$$|g(x) - g(y)| \leq |1 - \alpha\beta||x - y|.$$
En déduire une condition sur α pour que la fonction g soit contractante sur $\mathbb{R}$.
5. Conclure sur la convergence de l'algorithme du gradient à pas constant pour la minimisation de la fonction f.

Exercice 3 ***6 points***
Dans $\mathbb{R}^2$, on considère un ressort fixé en $(0, 0)$, de constante de raideur $k > 0$ et de longueur à l'équilibre $l = 0$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note D la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et on suppose que l'extrémité libre du ressort est contrainte de rester sur la droite D. L'objectif de cette exercice est de déterminer un point $(x^\star, y^\star)$ de D qui minimise l'énergie potentielle du système
$$E(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

1. Écrire ce problème sous la forme d'un problème de minimisation sous contrainte
$$\min_{(x,y)\in K} E(x, y)$$
où K est un ensemble à définir.
2. Montrer que la fonction E est coercive et strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que ce problème de minimisation sous contrainte admet une unique solution.
4. Déterminer l'état d'équilibre stable du système.