Polytech Sorbonne	Systèmes non linéaires et optimisation	2020-2021
MAIN3	Contrôle continu n° 2	

Exercice 1. (*Bonus : 2 points*)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et M une matrice symétrique à coefficients réels de taille $n \times n$, qui admet n valeurs propres réelles $(\lambda_i)_{0 \le i \le n}$. Montrer l'équivalence suivante

$$\lambda_i \ge 0, \quad \forall 0 \le i \le n \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (Mx) \ge 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où $\cdot$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$

Exercice 2. (*5 points*)
On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = x^3 - xy + y^2 - y.$$

1. (*1 pt*) Justifier que cette fonction n'admet pas de minimiseur global.
2. (*2 pt*) Calculer le gradient $\nabla g(x, y)$ et la matrice hessienne $H_g(x, y)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. (*2 pt*) Déterminer les éléments (x, y) tels que $\nabla g(x, y) = (0, 0)$. S'agit-il de minimiseurs de la fonction g ?

Exercice 3. (*10 points*)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

1. (*2 pt*) Monter qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ (et les déterminer) tels que $f(x, y) \ge \alpha \|(x, y)\|^2 + \beta$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
2. (*2 pt*) En déduire que le problème
$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \tag{1}$$
admet au moins une solution.
3. (*2 pt*) En étudiant la matrice hessienne de f au point $(0, 0)$, déduire du résultat de l'exercice 1 que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.
4. (*2 pt*) Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, etc.).
5. (*2 pt*) Résoudre alors le problème (1).

Exercice 4. (*5 points*)
Soit A une matrice injective de taille $P \times N$ avec $P > N \geq 1$ et $b \in \mathbb{R}^P$. On cherche à minimiser la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^N \to \|Ax - b\|^2$$

où $\|\cdot\|$ correspond à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^P$.

1. (*1 pt*) Montrer que le gradient de f s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\nabla f(x) = 2A^t(Ax - b).$$

2. (*2 pt*) Donner les itérations de la méthode du gradient à pas optimal en exprimant le pas optimal α_n en fonction de A, b et x_n.

3. (*2 pt*) Si $A^tA = \mathrm{Id}$, montrer que la méthode du gradient à pas optimal converge en une seule itération.