Contrôle continu 1

Durée du contrôle : 1 heure

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.
Les réponses aux questions doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront appréciées.

Exercice 1. (3 points)

1. Etudier les variations de la fonction $\varphi(x) = \cos\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que la suite de Picard $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers le point fixe $x^* = \varphi(x^*) \in [0,1]$ pour toute condition initiale $x_0 \in [0,1]$.
3. Quelle est l'ordre de convergence de cette méthode pour cette équation ?

Exercice 2. (3 points)
Soient $[0,T] \subset \mathbb{R}$ et $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$y'(t) + y^3(t) = \sin(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

munie d'une condition initiale $y(0) \in \mathbb{R}$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(t_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ une discrétisation régulière de pas $h = \frac{T}{N}$ de l'intervalle $[0,T]$. Pour approcher la solution de cette EDO aux points $(t_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$, on utilise le schéma d'Euler implicite qui consiste à construire une suite $(y_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ définie par

$$y_0 = y(0) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n - h y_{n+1}^3 + h\sin(t_{n+1}) \quad \forall n \in \{0,\ldots,N-1\}.$$

1. Donner l'expression $g_n(x)$ d'une fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que y_{n+1} est une racine de l'équation $g_n(x) = 0$. Calculer la dérivée $g_n'(x)$.
2. Ecrire la formule de récurrence générale pour résoudre une équation scalaire $f(x) = 0$ avec la méthode de Newton, pour une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$.
3. Peut-on appliquer cette méthode pour trouver y_{n+1} en fonction de y_n ? Quelle sera l'ordre de convergence ?

Exercice 3. (4 points)
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1 \\ x^3y - xy^3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $J_F(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Ecrire la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $F(x,y) = (0,0)^t$.
3. Montrer que la méthode converge localement vers $(0,1)^t$.
4. Quelles sont les trois autres solutions de l'équation ?