Contrôle continu 1

Durée du contrôle : 1 heure

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (5 points)
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (2.5 points) Utiliser la méthode de Newton pour construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge quadratiquement vers $\sqrt{2}$. En particulier, on précisera le choix de la condition initiale x_0.
2. (2.5 points) Même question pour approcher la solution de l'équation $e^{-x} = x$.

Exercice 2. (5 points)
Soient $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $x^\star$ un point fixe de g. Montrer que si $|g'(x^\star)| < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]x^\star - \varepsilon, x^\star + \varepsilon[$, la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \geq 0$$

converge linéairement vers $x^\star$.

Exercice 3. (5 points)
Soient F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue définie de F dans F. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction composée n fois, f^n, est contractante.

1. (1 point) Justifier que la fonction f^n admet une unique point fixe sur F.
2. (1.5 points) Monter que si x est un point fixe de f alors x est aussi un point fixe de la fonction composée f^k pour tout $k \geq 1$.
3. (1.5 points) Montrer que si x est un point fixe de f^n alors x est aussi un point fixe de f.
4. (1 point) Est-ce que f admet un unique point fixe sur F ?

Exercice 4. (5 points)
Soient $[0,T] \subset \mathbb{R}$ et $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R};\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$y'(t) + y^3(t) = \sin(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

munie d'une condition initiale $y(0) \in \mathbb{R}$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(t_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ une discrétisation régulière de pas $h = \frac{T}{N}$ de l'intervalle $[0,T]$. Pour approcher la solution de cette EDO aux points $(t_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$, on utilise le schéma d'Euler implicite qui consiste à construire une suite $(y_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ définie par

$$y_0 = y(0) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n - hy_{n+1}^3 + h\sin(t_{n+1}) \quad \forall n \in \{0,\dots,N-1\}.$$

1. (2 points) On définit le vecteur $Y \in \mathbb{R}^{N+1}$ par $Y = (y_0,\dots,y_N)^T$. Montrer que le vecteur Y est solution d'un système non linéaire de la forme $F(Y) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ une fonction de classe C^1 à définir.
2. (2 points) Montrer que la matrice jacobienne de F est une matrice triangulaire inférieure et calculer son déterminant.
3. (1 point) Conclure sur l'utilisation de la méthode de Newton pour approcher la solution de cette équation différentielle ordinaire.