Exercice 1
Soient $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $x^\star$ un point fixe de g. Montrer que si $|g'(x^\star)| < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]x^\star - \varepsilon, x^\star + \varepsilon[$, la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \geq 0$$

converge linéairement vers $x^\star$.

Exercice 2
L'objectif de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de $x^* = 2^{1/4}$. Pour cela, on introduit la fonction :

$$g(x) = x + \frac{2 - x^4}{4x^3}.$$

1. Vérifier que x^* est un point fixe de g.
2. À l'aide d'un tableau de variation montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par g.
3. Montrer que la méthode du point fixe appliquée à g est convergente pour tout $x_0 \in [1, 2]$.
4. En rappelant un résultat vu en TD, justifier (sans démonstration) que la méthode est d'ordre 2.

Exercice 3
Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $x^\star \in \mathbb{R}$ tel que $f(x^\star) = 0$, $f'(x^\star) = 0$ et $f''(x^\star) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $f(x) = (x - x^\star)^2 h(x)$. Indication : on utilisera la formule de Taylor-Lagrange.
2. Calculer la dérivée seconde de f en fonction de h et montrer que $h(x^\star) \neq 0$.
3. Écrire les itérations de la méthode de Newton sous la forme $x_{n+1} = g(x_n)$, où g est une fonction à définir.
4. Montrer que la méthode de Newton converge localement de manière linéaire.