Polytech Sorbonne | Systèmes non linéares et optimisation | 2020/2021
MAIN3 | Contrôle continu 1

Exercice 1
L'objectif de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de $x^* = 2^{1/4}$. Pour cela, on introduit la fonction :
$$g(x) = x + \frac{2 - x^4}{4x^3}.$$

1. Vérifier que x^* est un point fixe de g.
2. À l'aide d'un tableau de variation montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par g.
3. Montrer que g est contractante.
4. En déduire que la méthode du point fixe appliquée à g est convergente, pour tout $x_0 \in [1, 2]$.
5. En rappelant un résultat vu en TD, justifier (sans démonstration) que la méthode est d'ordre 2.

Exercice 2
On considère le système d'équations non linéaires suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rl} 5x + 2\sin(x) - 2\cos(y) & = 0, \\ -2\cos(x) + 2\sin(y) - 5y & = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$
On note (x^*, y^*) une solution de ce système. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme matricielle associée $|||\cdot|||$, définies par
$$\begin{array}{rcll} \|v\|_1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{2} |v_i|, & \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^2, \\ |||A||| & = & \displaystyle\max_{1\le j\le 2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}|, & \text{pour tout } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{array}$$

1. Ecrire le système sous la forme $X = G(X)$ où $X = (x, y)$ et G est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et vérifier que tout point fixe de G est solution de (1).
2. Calculer la matrice jacobienne de G et montrer que la fonction G est contractante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que le point fixe $X^* = (x^*, y^*)$ existe et est unique.
4. Construire, à l'aide de la méthode du point fixe, une suite $(X_n) = (x_n, y_n)$ qui converge vers $X^* = (x^*, y^*)$ et donner une estimation de l'erreur à l'ordre n.
5. On considère maintenant la méthode de Newton pour approcher la solution. Écrire l'équation (1) sous la forme $F(X) = 0$ où $X = (x, y)$ et F est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ à déterminer.
6. Construire (formellement) la suite $(X_n) = (x_n, y_n)$ donnée par la méthode de Newton.
7. Montrer que les itérations de cette suite sont toujours bien définies.
8. Justifier que la méthode converge localement vers $X^* = (x^*, y^*)$.