On cherche le point de $\mathbb{R}^3$ de norme minimale qui appartient au plan

$$(C) \qquad x + y + z = 1. \tag{4}$$

Pour cela, on va minimiser la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sous la contrainte (C).

1. Montrer l'existence d'un minimum.
2. Utiliser le théorème des extrema liés pour déterminer des conditions sur le minimiseur.
3. En déduire la valeur du minimiseur.

We look for the point of $\mathbb{R}^3$ of minimum norm which belongs to the plane

$$x + y + z = 1. \tag{5}$$

To do this, we will minimize the function

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

under constraint (5).

1. Show the existence of a minimum.
2. Use the Lagrange multiplier theorem to determine conditions on the minimizer.
3. Deduce the value of the minimizer.

On considère les fonctions g_1, g_2 et f définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-2, \\ g_2(x,y,z) &= (x-1)^2+y^2+(z-1)^2-1, \\ f(x,y,z) &= x+y+z. \end{aligned}$$

On pose $\mathbf{X} = (x,y,z)$.

1. Montrer que f admet un minimum sur l'ensemble

$$K = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(\mathbf{X}) = 0 \text{ et } g_2(\mathbf{X}) = 0\}.$$

2. Montrer que K est aussi l'intersection d'une sphère et d'un plan à déterminer
3. Utiliser le théorème des extrema liés pour déterminer le minimiseur.

We consider the functions g_1, g_2 and f defined on $\mathbb{R}^3$ by

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-2, \\ g_2(x,y,z) &= (x-1)^2+y^2+(z-1)^2-1, \\ f(x,y,z) &= x+y+z. \end{aligned}$$

We set $\mathbf{X} = (x,y,z)$.

1. Show that f admits a minimum on the set

$$K = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(\mathbf{X}) = 0 \text{ and } g_2(\mathbf{X}) = 0\}.$$

2. Show that K is also the intersection of a sphere and a plane to be determined
3. Use the Lagrange multiplier theorem to determine the minimizer of f